Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2020
Tarea #3: Análisis Funcional

Problema 3.1 *Considere el espacio métrico (X,d) en que*

$$X = \{f = f(x), x \in [-\pi, \pi] : f(x) \text{ es acotada}\}$$
$$d = d(f,g) = \sup_{x \in (-\pi,\pi)} |f(x) - g(x)|$$

Determine si la siguiente secuencia ξ es o no convergente en dicho espacio

$$\{\xi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)x) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Problema 3.2 *Demuestre que un subespacio $\mathscr{M}$ de un espacio métrico completo $\mathscr{X}$ es completo si y sólo si $\mathscr{M}$ es cerrado en $\mathscr{X}$.*

Problema 3.3 *Considere el espacio*

$$X = \mathscr{L}^2_{[-1,1]} = \left\{ f(t) \in \mathbb{R}, t \in [-1,1] : \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

y el (sub)espacio

$$S = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$$

Dada la función $x(t) = 2 - e^{-t}$,

a) Determine y grafique la mejor aproximación de $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_2$, es decir, en la norma inducida por el producto interno usual en $\mathscr{L}^2_{[-1,1]}$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

b) Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_1$, es decir,

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|dt$$

c) Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir,

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)|$$

JYE – 23 de noviembre de 2020