Métodos Matemáticos en Control Automático
Examen Final - Semestre 2, 2021

Problema 1 *Considere una función*

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & s & \mapsto & H(s) = \dfrac{s+1}{s+2} \end{array}$$

Determine en qué puntos del plano complejo $\mathbb{C}$ *la función* $\operatorname{Log} H(s)$ *es continua, diferenciable o analítica, en que* Log *es la rama principal de la función logaritmo compleja.*$H(s)$ *es continua, diferenciable o analítica.*

Problema 2 *Se define la norma-2 de una matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *como*

$$|||A|||_2 = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|A\,x\|_2}{\|x\|_2}$$

en que $\|\cdot\|_2$ *es la norma vectorial Euclideana o norma-2. Demuestre que* $|||A|||_2 = \overline{\sigma}(A)$*, en que* $\overline{\sigma}(A)$ *es el máximo valor singular de la matriz* A*.*

Problema 3 *Considere los siguientes conjuntos:*

H: espacios de Hilbert,	*M: espacios métricos,*
B: espacios de Banach,	*N: espacios normados,*
C: espacios completos,	*P: espacios con producto interno,*
T: espacios topológicos,	*V: espacios vectoriales.*

Haga un sólo diagrama indicando la contención o intersección de dichos conjuntos, ***fundamentando claramente su respuesta****.*

Problema 4 *Sea* (X,d) *un espacio métrico y sea* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una función. Suponga que* h *es una función creciente y que* $h(x+y)\leq h(x)+h(y)$ *para todo* $x,y\in X$ *¿Qué otras condiciones debe satisfacer* h *para que*

$$D(x,y) = h(d(x,y)), \quad x,y \in X$$

sea una métrica para X*?*

Problema 5 *Considere el espacio vectorial*

$$X = \{f = f(t), t\in[-\pi,\pi] : f(t)\in\mathbb{R}, f(t) \text{ es acotada}\}$$

y la siguiente secuencia en dicho espacio

$$\{S_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\sin((2k-1)t)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

1. *Determine si la secuencia es convergente* ***puntualmente*** *(es decir, para cada valor de* $t\in[-\pi,\pi]$*).*
2. *Determine si la secuencia es convergente en la métrica inducida por la norma* $\mathscr{L}_2$ *en* $[-\pi,\pi]$*.*
3. *Determine si la secuencia es convergente en la métrica inducida por la norma* $\mathscr{L}_\infty$ *en* $[-\pi,\pi]$*.*

JYE - 10 de enero de 2022