IPD410 - Métodos Matemáticos en Control Automático – S2 2021
Tarea #1. Variable Compleja

Problema 1.1 *Considere una función racional* $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$*, en que* $s \in \mathbb{C}$.

- *Determine en qué puntos del plano complejo* $\mathbb{C}$ *la función* $H(s)$ *es continua, diferenciable o analítica.*
- *¿Es posible extender "adecuadamente"* $H(s)$ *de manera que sea continua, diferenciable o analitica en todo el plano complejo extendido* $\mathbb{C}_e = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *?*
- *Determine en qué puntos del plano complejo* $\mathbb{C}$ *la función* $\operatorname{Log} H(s)$ *es continua, diferenciable o analítica, en que* Log *es la rama principal de la función logaritmo compleja.*

Problema 1.2 *Considere la señal* $f[k] = \alpha^k$ *definida en tiempo discreto* $k \in \mathbb{Z}$ *en que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es una constante.*

1. *Determine la transformada Zeta de* $f[k]$, $F(z)$ *y su región de convergencia en el plano* $z \in \mathbb{C}$.
2. *Determine (por definición) la transformada Zeta inversa de* $F(z)$*, es decir,* $\tilde{f}[k] = \mathscr{Z}^{-1}\{F(z)\}$*, y compárela con la señal* $f[k]$ *original.*
3. *Si se define* $G(e^{j\theta}) = F(z)|_{z=e^{j\theta}}$*, entonces determine la transformada de Fourier de tiempo discreto inversa de* $G(e^{j\theta})$*, es decir, una señal* $g[k]$ *y compárela con la señal* $f[k]$ *original.*
4. *Si* $\Phi(z) = F(z)F(z^{-1})$*, usando el teorema del residuo determine* $r[k] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{j\theta})e^{j\theta k} d\theta$*, en que* $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 1.3 *Usando las definiciones de transformada de Laplace y Transformada de Laplace Inversa, demuestre que*

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-(t-1)}\mu(t-1) \quad \Longleftrightarrow \quad F(t) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

Sugerencia: Use la definición de transformadas en *Análisis de Sistemas Lineales*, Salgado, Yuz & Rojas. `http://profesores.elo.utfsm.cl/~jyuz/ASL.html`

JYE – 27 de septiembre de 2020