Diseño Avanzado de Sistemas de Control. II Semestre 2012
Examen Final

Problema 1

Considere la función de transferencia

$$H(z) = \frac{0{,}4(z-4)(z-0{,}5)}{(z-0{,}8)(z-2)} \tag{1}$$

1. Determine su descomposición *inner-outer*.
2. Determine su proyección en $\mathscr{H}_2$ y $\mathscr{H}_2^{\perp}$.
3. Determine los operadores de Toeplitz y de Hankel asociados a la función transferencia.

Problema 2

Considere el sistema definido en variables de estado

$$x(k+1) = 0{,}9x(k) + 0{,}2u(k) + w(k) \tag{2}$$
$$y(k) = x(k) + v(k) \tag{3}$$

en que $w(k)$ y $v(k)$ son procesos de ruido blanco (no correlacionados entre ellos), de media cero y varianza σ_w^2 y σ_v^2, respectivamente, y la entrada $u(k)$ es generada como ruido blanco uniforme en el intervalo $[-1,1]$, y no correlacionado con los procesos de ruido.

1. Determine es espectro estacionario de la salida y.
2. Determine el filtro de Kalman estacionario para el sistema que permita estimar el estado $x(k)$.
3. Si σ_w^2 permanece fijo, analice los casos cuando σ_v^2 tiende a cero y cuando es *muy grande*.

Problema 3

Considere la planta de tiempo discreto:

$$G(z) = \frac{3}{z-0{,}8} \tag{4}$$

1. Determine un esquema de control por realimentación del estado observado que permita compensar perturbaciones de salida de tipo escalón **en el menor tiempo posible**
2. Determine un esquema de control clásico *equivalente*.
3. Finalmente, determine el esquema en términos del parámetro de Youla asociado.

Problema 4

Considere el problema LQR de tiempo continuo en que se desea minimizar el funcional

$$J_c(u) = \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt + x^T(t_f)Px(t_f) \tag{5}$$

en que $Q \geq 0$, $R > 0$, $P > 0$ y la trayectoria de estado x y la señal de control u están relacionadas a través de la dinámica del sistema

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + Bu(t) \quad ; x(0) = x_o \neq 0 \tag{6}$$

en que el par (A,B) es completamente controlable.

En este problema interesa estudiar el problema cuando se hace control del sistema a través de algún dispositivo digital de tiempo discreto. En esta situación, la señal de control es generada por un retentor de orden cero con periodo de muestreo uniforme T_s:

$$u(t) = u_{zoh}(t) = u_d(k) \quad kT_s \leq t < kT_s + T_s \tag{7}$$

en que $k \in \mathbb{Z}$.

1. Determine las matrices en la ecuación recursiva del sistema discretizado, es decir,

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k) \quad x_d(0) =? \tag{8}$$

tal que $x_d(k) = x(kT_s)$.

2. Determine si el par (A_d, B_d) es o no completamente controlable

3. Determine, si es posible, un funcional de costo en tiempo discreto de la forma

$$J_d(u_d) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \begin{bmatrix} x_d(\ell) \\ u_d(\ell) \end{bmatrix}^T M_d \begin{bmatrix} x_d(\ell) \\ u_d(\ell) \end{bmatrix} + x_d^T(N) P_d x_d(N) \tag{9}$$

tal que minimizar el funcional discreto sea equivalente a minimizar al funcional continuo cuando la entrada satisface l suposición (7), es decir,

$$J_c(u_{zoh}) = J_d(u_d) \tag{10}$$

4. En caso que existan restricciones en el problema LQR continuo, en las componentes de la entrada o del estado, de la forma

$$|u_i(t)| \leq p_i \qquad |x_\ell(t)| \leq q_\ell \tag{11}$$

Discuta cómo se podrían incluir en el problema LQR de tiempo discreto (8)-(9), de manera que sean satisfechas **en tiempo continuo**.