

# Diseño Avanzado de Sistemas de Control. II Semestre 2013

## Examen Final

---

### Problema 1

Considere la función de transferencia

$$H(z) = \frac{0,8(z - 1,5)}{(z - 0,8)(z - 2)} \quad (1)$$

1. Determine su descomposición *inner-outer*.
2. Determine su proyección en  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_2^\perp$ .

### Problema 2

Considere el sistema definido en variables de estado

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k) + w(k) \quad (2)$$

$$y(k) = cx(k) + v(k) \quad (3)$$

en que  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , y  $w(k)$  y  $v(k)$  son procesos de ruido blanco (no correlacionados entre ellos), de media cero y varianza  $\sigma_w^2$  y  $\sigma_v^2$ .

1. Determine el espectro estacionario de la salida  $y$ .
2. ¿Cómo puede obtenerse la estimación *óptima* de la secuencia de estado  $x_N = \{x(0), \dots, x(N)\}$  dada toda la secuencia de datos de entrada y salida  $\mathcal{D}_N = \{u_N, y_N\} = \{u(1), \dots, u(N), y(1), \dots, y(N)\}$ ?
3. ¿Cómo es posible obtener las estimaciones anteriores  $\hat{x}(k|N)$  de manera recursiva a partir de las estimaciones (recursivas) que entrega el filtro de Kalman usual  $\hat{x}(k|k)$ ?

*Sugerencia:* comience desde el final, es decir, ¿como se puede obtener  $\hat{x}(N-1|N)$  a partir de  $\hat{x}(N|N)$ ?

### Problema 3

Considere el problema LQR de tiempo continuo en que se desea minimizar el funcional

$$J_c(u) = \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt + x^T(t_f)Px(t_f) \quad (4)$$

en que  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$ ,  $P > 0$  y la trayectoria de estado  $x$  y la señal de control  $u$  están relacionadas a través de la dinámica del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; x(0) = x_o \neq 0 \quad (5)$$

en que el par  $(A, B)$  es completamente controlable.

**En este problema interesa estudiar el problema cuando se hace control del sistema a través de algún dispositivo digital de tiempo discreto.** En esta situación, la señal de control es generada por un retentor de orden cero con periodo de muestreo uniforme  $T_s$ :

$$u(t) = u_{zoh}(t) = u_d(k) \quad kT_s \leq t < kT_s + T_s \quad (6)$$

en que  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. Determine las matrices en la ecuación recursiva del sistema discretizado, es decir,

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k) \quad x_d(0) = ? \quad (7)$$

tal que  $x_d(k) = x(kT_s)$ .

2. Determine si el par  $(A_d, B_d)$  es o no completamente controlable

3. Determine, si es posible, un funcional de costo en tiempo discreto de la forma

$$J_d(u_d) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \begin{bmatrix} x_d(\ell) \\ u_d(\ell) \end{bmatrix}^T M_d \begin{bmatrix} x_d(\ell) \\ u_d(\ell) \end{bmatrix} + x_d^T(N) P_d x_d(N) \quad (8)$$

tal que minimizar el funcional discreto sea equivalente a minimizar al funcional continuo cuando la entrada satisface la suposición (6), es decir,

$$J_c(u_{zoh}) = J_d(u_d) \quad (9)$$

4. En caso que existan restricciones en el problema LQR continuo, en las componentes de la entrada o del estado, de la forma

$$|u_i(t)| \leq p_i \quad |x_\ell(t)| \leq q_\ell \quad (10)$$

Discuta cómo se podrían incluir en el problema LQR de tiempo discreto (7)-(8), de manera que sean satisfechas **en tiempo continuo**.