Sistemas en tiempo discreto

DEFINICION DE SISTEMA: Todo aquello que opera sobre una señal de entrada (tiempo discreto) y genera como salida otra señal (tiempo discreto)

- la señal $x[n]$ es transformada por el sistema "S" para producir $y[n]$ } $y[n] = S[x[n]] = S(x)$

- La relación entre entrada y salida define las propiedades del sistema S

- la respuesta a impulso de un sistema es la señal de salida del sistema cuando en la entrada hay un delta

$$\Rightarrow \quad h[n] = S(\delta[n])$$

  - puede ser infinita o finita
  - En algunos casos no aporta mucha info (e.g. sistemas no lineales y variantes en el tiempo)

$y[n] = e^{x[n]}$

$y[n] = n\,x[n]$

Esquema salida vs. Entrada

FIGS Fig. 2.12 P&M y Fig. pp 31 A&C

Ver OBS más adelante
- Sistemas recursivos $y[n] = S[x[n], y[n]] = S(x,y)$
- Sistemas no-recursivos $y[n] = S[x[n]] = S(x)$

$\Rightarrow$ un sistema no tiene una forma única de ser expresado matemáticamente

* Es posible re-escribir las ecuaciones de ciertos sistemas de modo que su implementación sea distinta:
- Descomposición fracciones parciales
- Recursivo $\leftrightarrow$ No recursivo
- Manipulación de polos / zeros
- etc.

OBS

- Un sistema no-recursivo $y = S(x)$ genera una salida que está totalmente definida por la entrada
- Un sistema recursivo $y = S(x, y)$ genera una señal de salida que puede depender de estados previos de ella misma $\Rightarrow$ requiere condiciones iniciales.

$\Rightarrow$ Condiciones iniciales:

- asociadas a la señal de entrada (si la señal tiene soporte izquierdo o es causal $\Rightarrow$ se asume que condiciones pasadas de la salida también)
- Cuando la salida en tiempos pasados del sistema es cero $\Rightarrow$ SISTEMA INICIALMENTE RELAJADO $y = 0$
- Se asume para señales con soporte derecho o infinito que en $n = -\infty$ el sistema $y[-\infty] = 0$

$x[n] = y[n] = 0 \quad \forall n < 0$

Si la entrada y salida son nulas para $n < 0 \Rightarrow$ INICIALMENTE RELAJADO

- Si $x[n]$ & $y[n]$ son señales causales $\Rightarrow$ INICIALMENTE RELAJADO.

$\Rightarrow$ Si $h[n]$ es causal (LTI) $\Rightarrow$ INICIALMENTE RELAJADO

FIG Representación gráfica de bloques para sistemas discretos Figs 2.13 - 2.17 P & M

PROPIEDADES DE SISTEMAS DISCRETOS

Cada propiedad clasifica sistemas

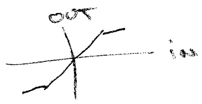
Deben ser para todas las señales de entrada (es más fácil demostrar que no cumple cierta propiedad!)

1) **Memoria**:

- Sistema sin memoria (o estático) sólo depende de la entrada en el mismo instante, i.e. $y[n] = f(x[n])$
- Sistema con memoria (o dinámico) depende de entradas i.e. $y[n] = f(x[n], x[n-1], \ldots)$

$\Rightarrow$ Si la salida del sistema en el tiempo n (i.e., $y[n]$) esta determinada completamente por la <u>entrada</u> en con muestras el intervalo $n-N$, el sistema tiene memoria N.

Se puede describir usando una curva input vs output



$\leftarrow$ $N=0 \Rightarrow$ Sin memoria o estático

$0 < N < \infty \Rightarrow$ Memoria finita

$N=\infty \Rightarrow$ Memoria infinita

} dinámico o con memoria

ejemplos

i) $y(n) = a\,x(n) \longrightarrow N=0$

ii) $y(n) = n\,x(n) + b\,x^3(n) \longrightarrow N=0$

iii) $y(n) = x(n) + 3\,x(n-1) \longrightarrow N=1$

iv) $y(n) = \sum_{k=0}^{M} x(n-k) \longrightarrow N=M$

v) $y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(n-k) \longrightarrow N=n$

vi) $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k) \longrightarrow N=\infty$

vii) $y(n) = y(n-1) + x(n) \longrightarrow$ $N=\infty$ pero puede ser implementado con $N=1$ en la salida.

2) Linealidad

DEF) Un sistema S (inicialmente relajado) es lineal si para cualquier par de entradas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ y cualquier par de constantes a_1, a_2 se satisface que

$$S(a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)) = a_1 S(x_1(n)) + a_2 S(x_2(n))$$

- Principio de superposición: la respuesta de una señal que corresponde a una suma ponderada de otras señales (componentes) es igual a la suma ponderada de la respuesta de cada componente.

$\boxed{\text{Fig}}$ 2.20 en P&M

OBS] • Un sistema lineal y inicialmente relajado tiene $y(n)=0$ cuando $x(n)=0$.

$\Rightarrow$ Si $y(n) \neq 0$ puede ser que no sea lineal o no esté inicialmente relajado.

• Sistemas inicialmente relajados que no cumplan con el principio de superposición: NO LINEALES

ejemplos:

el tiempo n es independiente de la entrada $\Leftarrow$ i) $y(n) = n\,x(n)$ LINEAL

1) $y_1(n) = n x_1(n)$; $y_2(n) = n y_2(n)$
2) $x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2$
3) $y_3(n) = n x_3(n) = n a_1 x_1 + n a x_2$
$= a y_1 + a y_2$

Operaciones cuadráticas o polinómicas $\leftarrow$ ii) $y(n) = x^2(n)$ NO LINEAL

1) $y_1 = x_1^2$ $y_2 = x_2^2$
2) $x_3 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 \Rightarrow y_3 = a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + 2a_1 a_2 \ldots$
$\neq a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$

Operaciones en el tiempo iii) $y(n) = x(n^2)$ LINEAL

1) $y_1 = x_1(n^2)$, $y_2 = x_2(n^2)$
$x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2$
$y_3 = x_3(n^2) = a_1 x_1(n^2) + a_2 x_2(n^2)$
$= a_1 y_1 + a_2 y_2$

iv) $y(n) = Ax(n) + B$ NO LINEAL

$y_1 = Ax_1 + B$ $y_2 = Ax_2 + B$
$x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2$ $y_3 = Ax_3 + B$
$y_3 = a_1 A x_1 + a_2 x_2 A + B$
$\neq a_1(Ax_1 + B) + a_2(Ax_2 + B)$

¿Cómo es posible si está descrito con una ecuación lineal? $\longleftarrow$ El problema es que el sistema no está relajado inicialmente (por eso no cumple)

$\Downarrow$

Señales con DC offset generan problemas de linealidad.

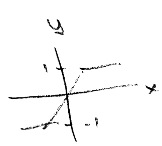
v) $y(n) = e^{x(n)}$ NO LINEAL

$y_1 = e^{x_1}$ $y_2 = e^{x_2}$
$x_3 = a x_1 + b x_2 \Rightarrow y_3 = e^{x_3}$
$y_3 = e^{a x_1 + b x_2} \neq a e^{x_1} + b e^{x_2}$

OBS] No lineal y no inicialmente relajado tampoco

test simple $x(n) = 0$
$y(n) = 1$

OVERLOAD



vi) $y(n) = \begin{cases} -1 , & x(n) < -1 \\ x(n) , & -1 \leq x(n) \leq 1 \\ 1 , & x(n) > 1 \end{cases}$

NO LINEAL

contraejemplo

$x_1 = 1$ $x_2 = 1$
$x_3 = 1 + 1$ $y_3 = 1$
$1 \neq 1 + 1$

OBS] Es lineal dentro del rango $[-1, 1]$

3. Invarianza en el tiempo

DEF) Un sistema (inicialmente relajado) es invariante en el tiempo si un retardo en la señal de entrada genera un retardo en la señal de salida, i.e.,

Comparar:
1) En la salida, correr la entrada
2) Correr la salida

$$y_1[n] = S[x_1[n]] \quad \text{e}$$
$$y_2[n] = S[x_1[n-K]] \quad \text{entonces}$$
$$y_2[n] = y_1[n-K]$$

Restar K muestras en x ya transformada

OBS) $y(n,K) = S[x(n-K)]$, para cualquier $x[n]$

Si $\forall n, K$ $\quad y(n,K) = y(n-K)$

entonces el sistema es TI, en caso contrario es TV

ejemplos

i) $y[n] = x[n] - x[n-1]$ TI

1) $y(n,K) = S(x_1[n-K])$
$= x_1[n-K] - x[n-K-1]$
$\Rightarrow y[n-K] = x[n-K] - x[n-K-1]$

ii) $y[n] = n\,x[n]$ TV

1) $y[n] = n\,x_1[n]$
$y(n,K) = n\,x_1[n-K]$ $\neq$
$y[n-K] = (n-K)\,x_1[n-K]$

iii) $y[n] = x[-n]$ TV

1) $y[n] = x[-n]$
$y(n,K) = x[-n-K]$ $\neq$
$y(n-K) = x[-n+K]$

iv) $y[n] = x[2n]$ TV

1) $y(n,K) = x(2n-K)$
$y(n-K) = x(2(n-K))$
$= x(2n-2K)$

v) $y[n] = x[n]\cos w_0 n$ TV

1) $y(n-K) = x[n-K]\cos w_0 n$ $\neq$
$y(n-K) = x(n-K)\cos(w_0(n-K))$

4. Causalidad

DEF] Un sistema es causal si la salida del sistema a cualquier tiempo ($y(n)$) depende de muestras actuales y pasadas ($x(n)$, $x(n-1)$, ..., ~~xxxx~~, ...) pero no depende de muestras futuras ($x(n+1)$, $x(n+2)$, ...), i.e. el sistema se puede escribir como

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-2), \ldots]$$

OBS] En sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) causalidad se puede evaluar en la respuesta a impulso, i.e. si $h(n)$ es una señal causal $\Rightarrow$ el sistema es causal.
↳ $h(n) = 0 \;\; \forall n < 0$

OBS] ¿Cómo puede existir un sistema NO causal?
- Trabajar off-line
- Trabajar con buffer y cierta latencia.

ejemplos

C i) $y(n) = x(n) \longrightarrow h(n) = \delta(n)$

C ii) $y(n) = x(n-1) \longrightarrow h(n) = \delta(n-1)$

C iii) $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_3 x(n-3)$

$\rightarrow h(n) = \{\underset{\uparrow}{b_0}, b_1, b_2, b_3\}$

C iv) $y(n) = y(n-1) + x(n)$

NC v) $y(n) = x(n) + 3x(n+4)$ $\quad y(0) = x(0) + 3x(4)$

NC vi) $y(n) = x(n^2)$ $\quad y(2) = x(4)$

NC vii) $y(n) = x[2n]$ $\quad y(2) = x(4)$

NC viii) $y(n) = x(-n)$ $\quad y(-1) = x(1)$

5. Estabilidad

DEF] Un sistema inicialmente relajado es BIBO (bounded input bounded output) $\Leftrightarrow$ $y[n]$ es acotada para cada entrada $x[n]$ acotada, i.e., es BIBO

si $|x(n)| \leq M_x < \infty$ y $|y[n]| \leq M_y < \infty$ $\forall n$.

OBS] Esto implica que para LTI, un sistema es BIBO si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

(su respuesta a impulso es absolutamente sumable)

¿De dónde viene? Para LTI (ya lo veremos)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]\right|$$

$$\leq \sum_{k=\infty}^{\infty} |h[k]| \underbrace{|x[n-k]|}_{\leq M_x}$$

$$\leq M_x \sum_{k=\infty}^{\infty} |h[k]|$$

$$\Rightarrow \text{ si } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \rightarrow |y[n]| \leq M_y < \infty$$

$\Rightarrow$ BIBO estable.

ejemplo

E i) $y[n] = x[n-1] \longrightarrow h[n] = \delta[n-1]$

E ii) $y[n] = x[2n] \longrightarrow$ if $|x| < \infty \Rightarrow |y[n]| < \infty$

I iii) $y[n] = y[n-1] + x[n] \rightarrow$ if $x = u[n]$ $y(\infty) = \infty$

I iv) $y[n] = y^2[n-1] + x[n] \rightarrow$ if $x = u[n]$ $y(\infty) = \infty$

OBS] Series geométricas son útiles:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1 \ ; \quad \sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1-z^N}{1-z}$$