Sistemas LTI (lineales e invariantes en el tiempo)

los sistemas LTI tienen una estructura dada por :

$$y[n] = -\sum_{K=1}^{N} a_K\, y(n-K) + \sum_{K=0}^{M} b_K\, x(n-K)$$

- donde $\{a_K\}$ y $\{b_K\}$ son constantes independientes de $x[n]$ e $y[n]$
- Donde $M \geq 0$, $N \geq 0$, sin restricciones entre M y N (ie, $M > N$, $M < N$, $M = N$)

<u>Convolución</u> : Los sistemas LTI se pueden expresar como una salida dada por la convolución entre la entrada y la respuesta a impulso $h[n]$.

OBS] Dada la estructura de los sistemas LTI, la respuesta impulso siempre existe y está bien definida.

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\, h[n-K] = x(n) * h(n)$$

<u>Demostración</u>

$$x[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[K]}_{\text{número}} \overbrace{\delta[n-K]}^{\text{impulso desplazado}}$$

$$y[n] = S(x[n])$$
$$= S\left(\sum_{K=-\infty}^{\infty} x(K)\, \delta[n-K]\right)$$

Por ser LTI

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} x(K)\, \underbrace{S(\delta(n-K))}$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} x(K)\, h(n-K)$$

OBS] Esto implica que cualquier sistema LTI puede ser expresado de forma no-recurrente mediante esta relación de convolución, aunque sea creado como recurrente.

OBS]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$ usando $m = n-k$, $k = n-m$

$$y[n] = \sum_{m=\infty}^{-\infty} x(n-m)\, h(m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)\, h(m)$$ (conmutatividad) (*)

⇒ INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA CONVOLUCIÓN EN TIEMPO DISCRETO

1) Aplicar una operación espejo sobre el origen en $h[k] \to h[-k]$
2) Desplazar $h[-k]$ hacia la derecha por n_0 (si n_0 es positivo) para ir de $h[-k] \to h[n_0-k]$
3) Multiplicar la señal de entrada por $h[n_0-k)$ para obtener $v(k) = x(k) \cdot h(n_0-k)$
4) Sumar todos los valores de $v(k) \to y(n_0)$

Figura: 2.23 de P&M (pag 78)

Propiedades de la convolución

Conmutatividad: 1) $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$ (ver demostración en (*))

Asociatividad: 2) $(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$

OBS] La respuestas a impulsos de sistemas en cascada se pueden aglomerar en una sola

Demostración

$$\underbrace{\left(x[n] * h_1[n]\right)}_{y_1[n]} * h_2[n] = x[n] * \underbrace{\left(h_1[n] * h_2[n]\right)}$$
$$= x[n] * h[n] = y[n]$$

Goal show that
LHS $= x[n] * h[n]$

$$\cancel{x}y[n] = y_1[n] * h_2[n] \overset{\text{TBD}}{=} x[n] * h[n]$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_1[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_1[m]\, h_2[n-m]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_1[m-k] \cdot h_2[n-m]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[\underbrace{m-k}_{\mu}]\, h_2[n-m]$$

$\mu = m - k$
$m = \mu + k$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} h_1[\mu]\, h_2[n-k-\mu]}_{h[n-k]}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = x[n] * h[n] \quad =!$$

OBS) Combinando 1) y 2) podemos decir que el orden de los sistemas LTI en cascada es intercambiable, i.e.

$$x[n] \rightarrow \boxed{h_1(n)} \rightarrow \boxed{h_2(n)} \rightarrow y[n]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{h_2(n)} \rightarrow \boxed{h_1(n)} \rightarrow y[n]$$

3) Distributividad : $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

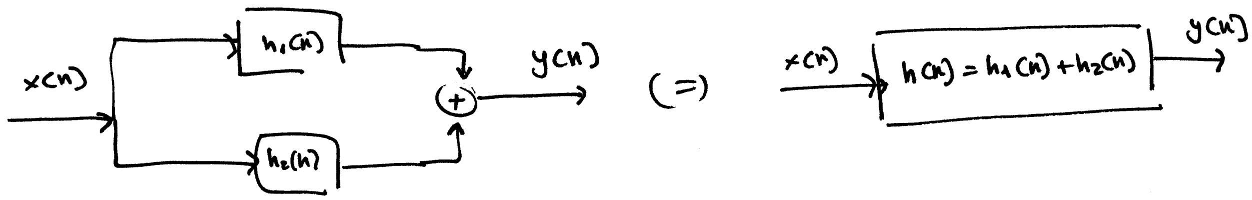
Demostración

$$x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left(h_1(n-k) + h_2(n-k)\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h_1(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h_2(n-k)$$

$$= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

OBS)



- Es posible realizar tareas en paralelo para la resolución de sistemas.

OBS) Es conveniente considerar las series geométricas para el estudio de sistemas, es decir.

i) $$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad , \quad |z| < 1$$

ii) $$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1-z^N}{1-z} \quad , \quad \forall z$$

ejemplos

1.) Determine el rango de valores del parámetro "a" para que el sistema LTI con respuesta a impulso

$$h[n] = a^n u[n] \quad \text{sea estable.}$$

OBS)

- El sistema es causal
- $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[k]|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|} \quad \text{si } |a|<1$$

(en caso contrario diverge)

$$\Rightarrow \text{si } |a|<1 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \Rightarrow \text{es ESTABLE.}$$

2) Un sistema LTI tiene una respuesta a impulso

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n<0 \end{cases}$$

determinar los valores (rangos) para que sea estable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n}_{\frac{1}{1-|a|},\ |a|<1} + \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n$$

$$k = -n$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{b}\right|^k - \underbrace{\frac{1}{|b|^0}}_{1}$$

$$= \frac{1}{1-\left|\frac{1}{b}\right|} - 1 = \frac{\frac{1}{|b|}\cdot 1}{1-\frac{1}{|b|}}$$

$$\frac{1}{|b|} < 1 \Rightarrow |b| > 1$$

$$\Rightarrow |a|<1, \ |b|>1$$

IMPLEMENTACIÓN DE SISTEMAS LTI

- Es posible optimizar el uso de recursos de memoria utilizando las propiedades de sistemas LTI
- OBS) Considere que una unidad de retardo se denota $\to \boxed{z^{-1}} \to$

1) Estructura en Forma directa I (DF-I)

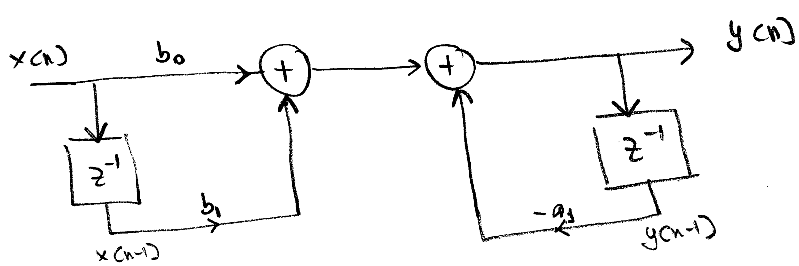
Considere el sistema

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \qquad (*)$$

La implementación DF-I utiliza delays separados para la entrada y salida, de modo que (*) se puede separar en

$$v(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$ → buffer para entrada

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + v(n)$$ → buffer para la salida



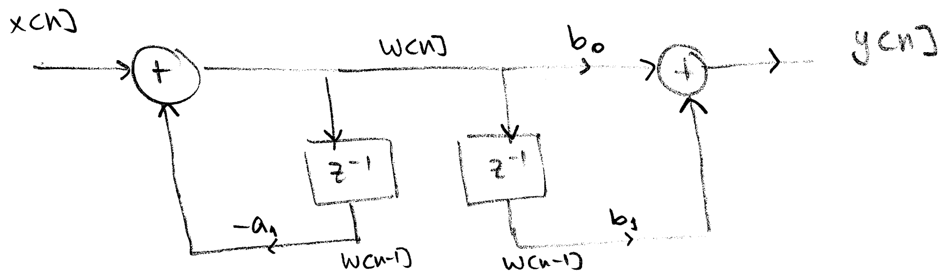
2) Estructura en Forma directa II (DF-II) (Forma canónica)

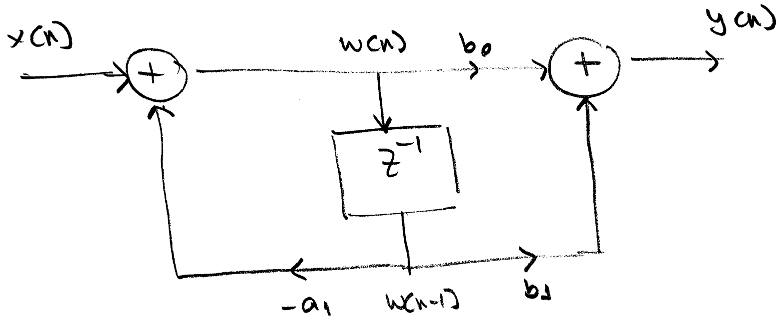
$$w(n) = -a_1 w(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1)$$

Un buffer para una variable intermedia

Usa una variable intermedia, asociada a la conmutatividad y asociatividad que permite intercambiar el orden





Esta estructura requiere solo 1 delay y su forma se puede generalizar de modo que

DF1)

$$\left.\begin{aligned} v(n) &= \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k) \\ y(n) &= -\sum_{k=1}^{N} a_k \, y(n-k) + v[n] \end{aligned}\right\} N+M \text{ delays}$$

DF2)

$$\left.\begin{aligned} w(n) &= -\sum_{k=1}^{N} a_k \, w(n-k) + x(n) \\ y(n) &= \sum_{k=0}^{M} b_k \, w(n-k] \end{aligned}\right\} \max(N,M) \text{ delays}$$

ANALISIS Y SOLUCION DE SISTEMAS LTI

1) Solución directa : (1)
   - buscar la solución con estado cero = y_{zs}
   - buscar la solución con entrada cero = y_{zi}

$$\Rightarrow \quad y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

(2) Solución homogenea y particular

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

i) $y_h(n) \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = 0$

$$y_h(n) = \lambda^n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{n-k} = 0$$ polinomio característico

$$y_h(n) = C_1 \lambda_1^n + \dots + C_N \lambda_N^n$$

solución generalizada de $y_{zi}(n)$

ii) $y_p(n) \rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k\, y_p(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$ $\quad a_0 = 1$

asume que la solución tiene la forma de la entrada, para una señal de entrada dada. (i.e, para una señal en particular)

2) Solución indirecta : Transformada z !!