$\boxed{\text{DTFT : Transformada de Fourier en tiempo discreto}}$

$\Longrightarrow$ DTFT : Transformada para señales en tiempo discreto.

CTFT : $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

una señal muestreada : $$x_s(t) = comb_{T_s}(x(t))$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t-kT_s)$$

CTFT de $x_s(t)$ :

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t-kT_s)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, \delta(t-kT_s)\, dt}_{x(kT_s)\, e^{-j2\pi f k T_s}}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\, e^{-j2\pi f k T_s}$$

$n = kT_s \Rightarrow$
$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j2\pi f n}$$
$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$
//

OBS)
$$\mathrm{Comb}_{T_S}(x(t)) \overset{CTFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T_S}\,\mathrm{rep}_{\frac{1}{T_S}}(X(f))$$

$\Rightarrow$ DTFT es periódica cada $F_S = \frac{1}{T_S}$ (o $2\pi$ periódica)

$\Rightarrow$ $X(\omega) = X(\omega \pm 2\pi)$

DEF)

DTFT Directa : $X(\omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$

DTFT inversa : $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$

OBS) La DTFT es una representación en una base compleja (con amplitud 1), un caso particular de la transformada Z.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

DTFT $\Rightarrow$ $X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$

OBS) Si $X(z)$ tiene a $|z| = 1$ en el ROC, entonces DTFT existe y cumple con $X(\omega) = X(z = e^{j\omega})$.

## TRANSFORMADA DTFT : PROPIEDADES

OBS) Estas propiedades se pueden demostrar de igual forma que se hacen para la transformada Z.

1) LINEALIDAD : $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$

2. RETARDOS : $x(n-n_0) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(w)\, e^{-jwn_0}$ → pregunta ¿Cómo afecta la Fase a la señal?

3. MODULACIÓN : $x(n)\, e^{jw_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(w-w_0) = X(e^{j(w-w_0)})$

$x(n) \cos w_0 n \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X(w-w_0) + X(w+w_0)\right]$

4. VALOR DC : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(0)$

5. CONJUGADO : $x^*(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X^*(-w)$

6. PARTE REAL : $\mathrm{Real}(x(n)) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X(w) + X^*(-w)\right]$

$\mathrm{Imag}(x(n)) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j}\left[X(w) - X^*(-w)\right]$

7. CONVOLUCIÓN : $x(n) * h(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(w)\cdot H(w)$

$x(n)\cdot h(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(w) * H(w)$

OBS) Si $x(n)$ es real $\Rightarrow$ $x(n) = x^*(n)$ $\Rightarrow$ $X(w) = X^*(-w)$

$X_R(w) = X_R(-w)$
$X_I(w) = -X_I(-w)$

$\Rightarrow |X(w)| = |X(-w)|$

$\Rightarrow \measuredangle X(w) = -\measuredangle X(-w)$

8. TIEMPO REVERSO $x(-n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(-w)$

## PARES DE TRANSFORMADAS DTFT ÚTILES

i) $x(n) = \delta(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(w) = 1$

ROC
No converge de forma directa

ii) $x(n) = 1 \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(w) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - 2\pi k)$

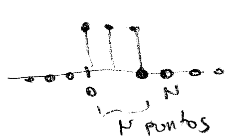
$= 2\pi\, \mathrm{rep}_{2\pi}\left[\delta(w)\right]$

iii) $x(n) = e^{jw_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(w) = \mathrm{rep}\left[2\pi\, \delta(w-w_0)\right]$

iv) $x(n) = u(n) - u(n-N) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(w) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jwn} = \dfrac{1 - e^{-jwN}}{1 - e^{-jw}}$

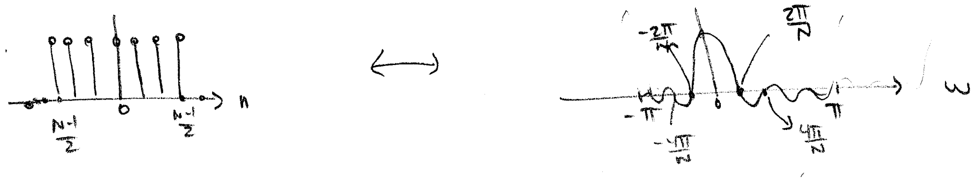
$x(n) = \begin{cases} 1 & , 0 \le n \le N-1 \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$

$= e^{-jw\frac{(N-1)}{2}} \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{wN}{2}\right)}{\sin(wN)}$




$= e^{-jw\frac{(N-1)}{2}}\, \mathrm{psinc}_N(w)$

v) $x[n] = u[n + \frac{(N-1)}{2}] - u[n - \frac{(N-1)}{2}]$ , $N$ impar . $\xleftrightarrow{DTFT} X(\omega) = p\,sinc_N(\omega)$



OBS) if $x_2[n] = u[n] - u[n-N] \Rightarrow X_2(\omega)$

$$x[n] = x_2[n - (\tfrac{N-1}{2})] \Rightarrow X(\omega) = X_2(\omega) \cdot e^{j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = p\,sinc_N(\omega)$$

OBS) ¿Dónde están los puntos donde $X(\omega) = 0$ ?

$\sin(\frac{\omega N}{2}) = 0$

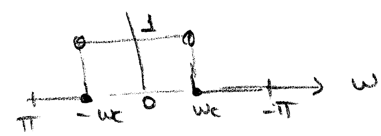
$\Rightarrow \frac{\omega N}{2} = n\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi n}{N}$

$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

vi) $x[n] = sinc(\frac{\omega_c n}{\pi}) \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \xleftrightarrow{DTFT} X(\omega) = \begin{cases} 1 , & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \cdot \frac{\omega_c}{\pi}$$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{n\pi}$$



OBS) $sinc(Tn) = \dfrac{\sin(nT\pi)}{nT\pi}$

## DTFT y sistemas LTI

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

OBS) señales de entrada útiles

i) $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = \delta[n] * h[n] = h[n]$

$Y(\omega) = H(\omega)$

ii) $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi - \omega_0)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$
$$= H(\omega) \cdot 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$
$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega)\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$
$$\hookrightarrow H(\omega_0)$$
$$= H(\omega_0) \cdot \underbrace{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)}_{X(\omega)}$$

$$\Rightarrow \quad Y(\omega) = H(\omega_0)\, X(\omega)$$
$$y[n] = H(\omega_0)\, x[n]$$

OBS] entre $(-\pi, \pi)$ $\quad X(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$

$$\Rightarrow \quad Y(\omega) = H(\omega) \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$
$$Y(\omega) = H(\omega_0)$$

OBS] Es siempre conveniente expresar $X(\omega)$, $H(\omega)$ como

$$H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j \measuredangle H(\omega)}$$

ya que se suelen graficar separadas $|H(\omega)|$ y $\measuredangle H(\omega)$

PROBLEMAS TIPO:

1) Dada una ecuación de diferencia, obtener $H(\omega)$ y graficar $|H(\omega)|$ y $\measuredangle H(\omega)$

2) Dada una señal, encontrar su DTFT y la DTFT de la salida al pasar por un filtro (puede ser dado con ecuacion de diferencia, polos & ceros, $h[n]$, o $H(\omega)$)

3) Efectos de upsampling y downsampling en señales y sistemas
$X(\omega)$, $Y(\omega)$ $\quad H(\omega)$