

Sistemas LTI (lineales e invariantes en el tiempo)

Los sistemas LTI tienen una estructura dada por:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- Donde $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son constantes independientes de $x[n]$ e $y[n]$.
- Donde $M \geq 0$, $N \geq 0$, sin restricciones entre M y N (i.e., $M > N$, $M < N$, $M = N$).

Convolución: Los sistemas LTI se pueden expresar como una salida dada por la convolución entre la entrada y la respuesta a impulso $h[n]$.

OBS:

Dada la estructura de los sistemas LTI, la respuesta impulso siempre existe y está bien definida.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

Demostración:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \\ y[n] &= S(x[n]) \\ &= S\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]S(\delta[n-k]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

OBS:

Esto implica que cualquier sistema LTI puede ser expresado de forma no-recurrente mediante esta relación de convolución, aunque sea creado como recurrente.

OBS:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] \quad \text{usando } m = n - k, k = n - m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] \quad (\text{Conmutatividad}) (\star) \end{aligned}$$

⇒ Interpretación gráfica de la convolución en tiempo discreto:

1. Aplicar una operación espejo sobre el origen en $h[k] \rightarrow h[-k]$
2. Desplazar $h[-k]$ hacia la derecha por n_0 (si n_0 es positivo) para ir de $h[-k] \rightarrow h[n_0 - k]$
3. Multiplicar señal de entrada por $h[n_0 - k]$ para obtener $v[k] = x[k] \cdot h[n_0 - k]$

4. Sumar todos los valores de $v[k] \rightarrow y[n_0]$

Figura 2.23 de Proakis & Manolakis (P&M):

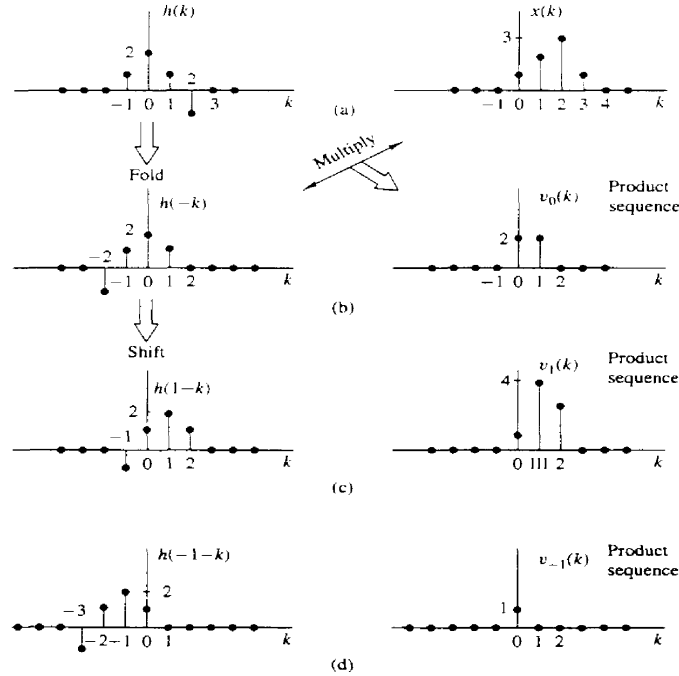


Figure 2.23 Graphical computation of convolution.

Propiedades de la convolución:

1. Conmutatividad: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$ (ver demostración en \star)
2. Asociatividad: $(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$

OBS: Las respuestas a impulsos de sistemas en cascada se pueden agrupar en una sola.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] &= x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \\
 y_1[n] * h_2[n] &= x[n] * h[n] \\
 &= y[n]
 \end{aligned}$$

Objetivo: Mostrar que el lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a $x[n] * h[n]$.

$$\begin{aligned}
y[n] &= y_1[n] * h_2[n] && \stackrel{TBD}{=} && x[n] * h[n] \\
y_1[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_1[n-k] \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[m] h_2[n-m] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_1[m-k] h_2[n-m] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{u=-\infty}^{\infty} h_1[u] h_2[n-k-u] && (u = m - k, m = u + k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] && = && x[n] * h[n]
\end{aligned}$$

OBS: Combinando 1) y 2) podemos decir que el orden de los sistemas LTI en cascadas es intercambiable, i.e. (P&M 2.26):

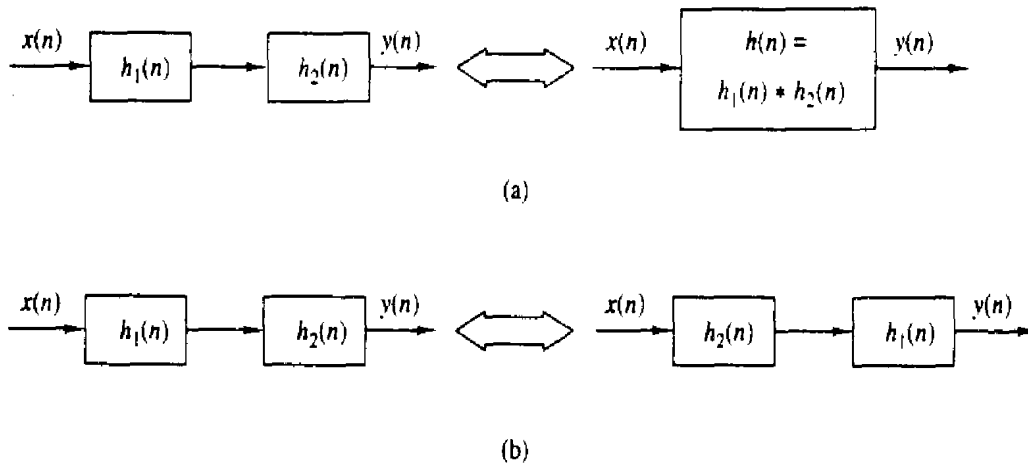


Figure 2.26 Implications of the associative (a) and the associative and commutative (b) properties of convolution.

3. Distributividad: $x[n] * [h_1[n] + h_2[n]] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$

Demostración:

$$\begin{aligned}
x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] (h_1[n-k] + h_2[n-k]) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_2[n-k] \\
&= x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]
\end{aligned}$$

OBS: Es posible realizar tareas en paralelo para la reducción de sistemas (fig. 2.27 P&M):

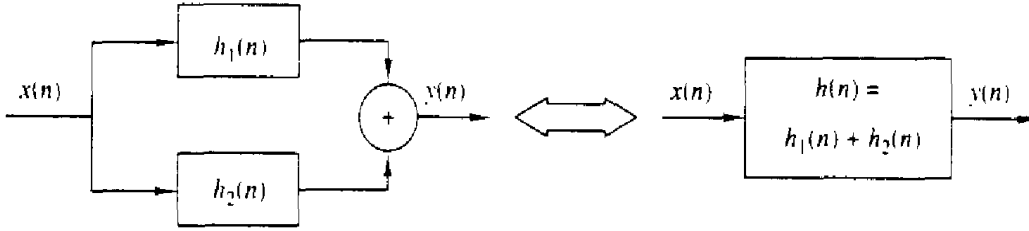


Figure 2.27 Interpretation of the distributive property of convolution: two LTI systems connected in parallel can be replaced by a single system with $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$.

OBS: Es conveniente considerar las series geométricas para el estudio de sistemas, es decir:

i $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$

ii $\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1-z^N}{1-z}, \quad \forall z$

Ejemplos:

1 Determine el rango de valores del parametro "a" para que el sistema LTI con respuesta a impulso $h[n] = a^n u[n]$ sea estable.

OBS:

$$\begin{aligned} & \text{El sistema es causal} \\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[k]| \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|} \quad \text{si } |a| < 1 \text{ (en caso contrario, diverge)} \\ & \Rightarrow \text{Si } |a| < 1 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \Rightarrow \text{es ESTABLE} \end{aligned}$$

2 Un sistema LTI tiene una respuesta a impulso:

$$h[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & -n < 0 \end{cases}$$

Determinar los rangos para que sea estable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n \Rightarrow |a| < 1, |b| > 1$$

Implementación de sistemas LTI:

- Es posible optimizar el uso de recursos de memoria utilizando las propiedades de sistemas LTI
- Considere que una unidad de retardo se denota z^{-1}

1 Estructura en forma directa I (DF-I)

Considere el sistema

$$y[n] = -a_1y[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1] \quad (\star)$$

La implementación DF-I utiliza delays separados para la entrada y salida, de modo que (\star) se puede separar en:

$$\begin{aligned}y[n] &= b_0x[n] + b_1x[n-1] \\y[n] &= -a_1y[n-1] + v[n]\end{aligned}$$

La figura 2.32(a) (P&M) muestra la realización de DF-I.

2 Estructura en forma directa II (DF-II) (Forma canónica)

$$\begin{aligned}w[n] &= -a_1w[n-1] + x[n] \\y[n] &= b_0w[n] + b_1w[n-1]\end{aligned}$$

Usa una variable intermedia ($w[n]$), asociada a la conmutatividad y asociatividad que permite intercambiar el orden.

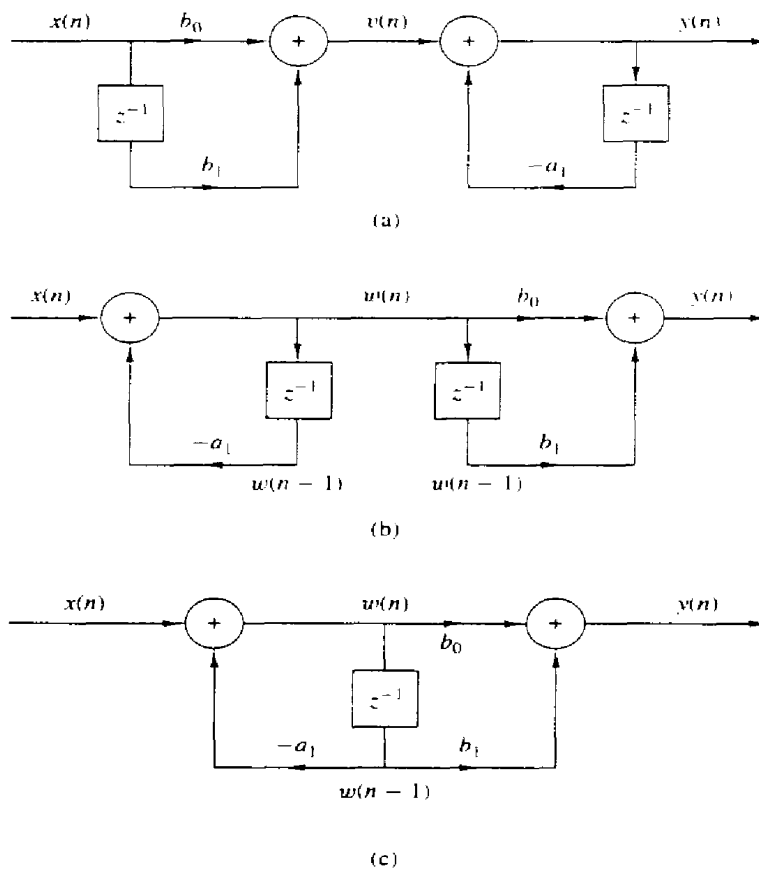


Figure 2.32 Steps in converting from the direct form I realization in (a) to the direct form II realization in (c).

Esta estructura requiere solo 1 delay y su forma se puede generalizar de modo que:

DF1):

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \\ y[n] &= - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n] \end{aligned}$$

DF2):

$$\begin{aligned} w[n] &= - \sum_{k=1}^1 a_k w[n-k] + x[n] \\ y[n] &= \sum_{k=0}^M b_k w[n-k] \end{aligned}$$

Analisis y solución de sistemas LTI:

1 Solución directa:

- (a) • Buscar la solución con estado cero = y_{zs}
 • Buscar la solución con entrada cero = y_{zi}
 $\Rightarrow y[n] = y_{zs}[n] + y_{zi}[n]$

(b) Solución homogénea y particular

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

i.

$$\begin{aligned} y_h[n] &\Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \\ y_h[n] &= \lambda^n \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k \lambda^{n-k} &= 0 \quad \text{Polinomio característico} \end{aligned} \tag{1}$$

$$y_h[n] = c_1 \lambda_1^n + \dots + c_N \lambda_N^n$$

Solución generalizada de $y_{zi}[n]$

ii. $y_p[n] \rightarrow \sum_{k=0}^N a_k y_p[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad a_0 = 1$

Asume que la solución tiene la forma de la entrada, para una señal de entrada dada. (i.e., para una señal en particular)

2 Solución indirecta: Transformada Z!