Transformada Z y sus Aplicaciones en Sistemas LTI

¿Qué es la transformada Z?

- Es una representación para señales en tiempo discreto mediante una serie infinita de números complejos.
- Es una herramienta muy útil y poderosa para estudiar sistemas en tiempo discreto, y es el equivalente a la transformación de Laplace, pero en tiempo discreto.
- Existen formas de ir del plano S al plano Z, vinculando estas dos transformadas aun mejor.

Definición: Transformada Directa (de soporte doble)

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[z]z^{-n} \qquad (z \text{ es una variable compleja})$$

$$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

OBS:
Existe una versión con soporte derecho solamente, que se usa para estudiar sistemas no relajados (no en esta asignatura).

OBS:
Por ser una serie infinita, la transformada existe sólo donde la serie converge. La región de convergencia (ROC) de $X(z)$ son todos los valores de z donde $X(z)$ toma un valor finito (Generalización de la idea de polos de $X(z)$)). En otras palabras, la suma converge.

<u>Ejemplos:</u>

i. $x[n] = \{\underline{1}, 2, 5, 7, 0, 1\}$
$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$; ROC: $\forall z - \{z = 0\}$

ii. $x[n] = \{1, 2, \underline{5}, 7, 0, 1\}$
$X(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$; ROC: $\forall z - \{z = 0, z = \infty\}$

iii. $x[n] = \{\underline{0}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\}$
$X(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$; ROC: $\forall z - \{z = 0\}$

iv. $x[n] = \delta[n]$
$X(z) = 1$; ROC: $\forall z$

v. $x[n] = \delta[n-k]$
$X(z) = z^{-k}$; ROC: $\forall z - \{z = 0\}, k > 0$

vi. $x[n] = \delta[n+k]$
$X(z) = z^{k}$; ROC: $\forall z - \{z = \infty\}, k > 0$

OBS:

Para señales finitas, ROC es siempre $\forall z$ (todo el plano z) menos 0 y/o infinito. (Suma de ceros).

vii. $x[n] = a^n u[n]$

$X(z) = \sum_{n=-0}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=-0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$ ROC: $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

viii. $x[n] = e^{jw_0 n} u[n] \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-e^{jw_0} z^{-1}}$

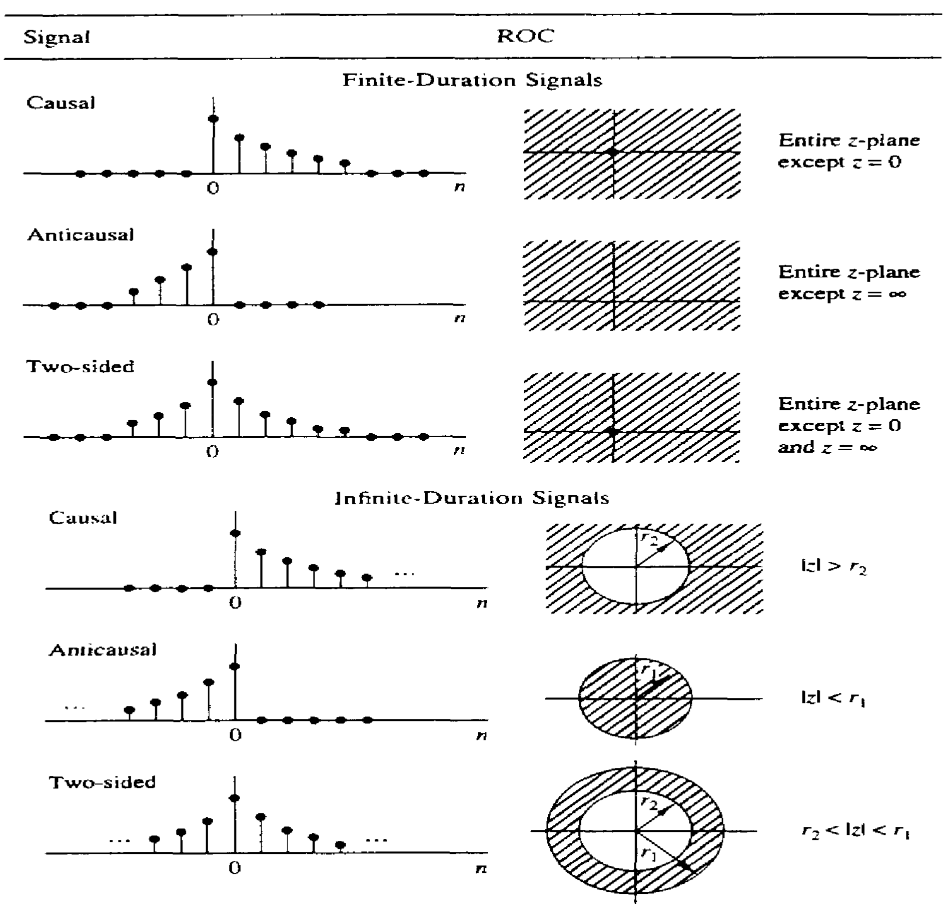
OBS:

Las señales infinitas tienen ROC asociado a un radio $r > 0$.

- Causales (soporte derecho) $|z| > r$
- Anti-causales (soporte izquierdo) $|z| < r$
- Soporte doble $r_2 < |z| < r_1$

Tabla 3.1 de Proakis y Manolakis (p.159):

TABLE 3.1 CHARACTERISTIC FAMILIES OF SIGNALS WITH THEIR CORRESPONDING ROC



Polos y Ceros

- Los ceros de $X(z)$ se producen cuando $X(z) = 0$
- Los polos de $X(z)$ se obtienen cuando $X(z) = \infty$

Si $X(z)$ es una función racional:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \left(\frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}}\right) \frac{z^M + (\frac{b_1}{b_0}) z^{M-1} + \cdots + (\frac{b_M}{b_0})}{z^N + (\frac{a_1}{a_0}) z^{N-1} + \cdots + (\frac{a_N}{a_0})} \\ &= \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)} \\ &= G z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}, \quad G = \frac{b_0}{a_0} \end{aligned} \tag{1}$$

OBS:
$X(z)$ tiene N polos, M ceros y $|N - M|$ ceros $(N > M)$ o polos $(N < M)$ en el origen.

OBS:
Polos se dibujan con "x" y los ceros con "o".

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x[n] &= a^n u[n] \qquad a > 0 \\ X(z) &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - a} \quad \text{polo en } z = a \\ \text{ROC} : |a| &> a \end{aligned} \tag{2}$$

$\Rightarrow$ Esta señal se obtiene con un polo en $z = a$ y un cero en $z = 0$.

OBS: Todas las señales tienen asociados polos y/o ceros.

Transformada de Z inversa

Definición:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

$\oint \Rightarrow$ integral en un contorno cerrado dentro de ROC

OBS: Dado que $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, normalmente utilizamos inversión de $X(z) \rightarrow x[n]$ mediante propiedades de la transformada y casos de señales conocidas.

Tabla 3.3 de Proakis y Manolakis (p.174):

TABLE 3.3 SOME COMMON Z-TRANSFORM PAIRS

	Signal, $x(n)$	z-Transform, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	All z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7	$(\cos \omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$(\sin \omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$(a^n \cos \omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	$(a^n \sin \omega_0 n) u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Propiedades de la transformada Z:

i. Linealidad:

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) \text{ y} \\ x_2[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z), \text{ entonces} \\ x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} x[n] = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) \end{aligned} \tag{3}$$

ii. Corrimientos temporales:

$$\begin{aligned} \text{Si } x[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \\ \text{entonces, } x[n-k] &\overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z) \end{aligned} \tag{4}$$

iii. Modulación:

$$\begin{aligned} \text{Si } x[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \quad a \neq 0 \\ \text{entonces, } a^n x[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X(z/a) = X(a^{-1}z) \end{aligned} \tag{5}$$

iv. Reversamiento temporal:

$$\begin{aligned} \text{Si } x[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \\ \text{entonces, } x[-n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

v. Convolución:

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) \text{ y} \\ x_2[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z), \\ \text{entonces, } x_1[n] * x_2[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z) \end{aligned} \tag{7}$$

vi. Multiplicación por indice de tiempo:

$$nx[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{d}{dz}[X(z)] \tag{8}$$

vii. Conjugación:

$$\begin{aligned} \text{Si } x[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \\ x^*[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} X^*(z^*) \end{aligned} \tag{9}$$

viii. Parte real, parte imaginaria:

$$\begin{aligned} \text{Real}(x[n]) &\overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)] \\ \text{Imag}(x[n]) &\overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)] \end{aligned} \tag{10}$$

Transformada Z en sistemas LTI

OBS:

Por la propiedad de convolución, $y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z)$
donde $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

Aplicaciones y ejemplos clásicos

1. Dado una ecuación de diferencia, encontrar polos y ceros:
   - Tomar $y[n] = S(x[n])$
   - Aplicar transformada Z $\Rightarrow Y(z) = X(z)H(z)$
   - Agrupar polinomios $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$
   - Encontrar:

$$\begin{aligned} D(z) = 0 &\Rightarrow \text{polos} \\ N(z) = 0 &\Rightarrow \text{ceros} \end{aligned} \tag{11}$$

2. Dado un filtro $H(z)$ obtener la ecuación de diferencia:
   - $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$
   - $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$
   - $Y(z) = X(z)H(z)$
     $Y(z)(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}) = X(z)(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k})$
     $y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$
     $\Rightarrow y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$

3. Diseñar un filtro que tenga P polos o ceros:
   - Crear $H(z) = \frac{(z-z_1)\cdots(z-z_P)}{(z-p_1)\cdots(z-p_P)}$
   - Poner $H(z)$ en la forma polinómica:
     $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$
   - Aplicar el método de 2) para expresarlo como una ecuación de diferencia.

OBS:
Polos y ceros se pueden cancelar, pero en la práctica ésto es peligroso por errores de redondeo, si ese fuera una consideración de diseño de un filtro.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} y[n] &= y[n-1] + x[n] - x[n-1] \\ Y(z) &= Y(z)z^{-1} + X(z) - X(z)z^{-1} \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}} = 1 \\ h[n] &= \delta[n] \end{aligned} \tag{12}$$

OBS:

- Polos y ceros en el origen no generan cambios en la magnitud del filtro, pero si en la fase.
- Cuando se hace 3) (Diseño de un filtro mediante la ubicación de polos/ceros) es conveniente ubicar polos/ceros en origen (según corresponda) para mantener el mismo orden en el $D(z)$ y $N(z)$, lo que permite reconstruir la misma forma de

  $$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

  En otras palabras: Siempre debemos tener la misma cantidad de polos que de ceros (para evitar retrasos innecesarios de la salida/entrada), aunque algunos pueden estar en el origen. (Generalmente los del origen se ignoran cuando se habla de filtros con "sólo polos" o "sólo ceros" [1], pero están presentes).

Ejemplo: Un sistema de sólo polos conocido es LPC donde:

$$H(z) = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \qquad \text{¿Tiene este sistema sólo polos?}$$

$$\text{No} \Rightarrow H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\overbrace{z^N}^{N\text{ceros (origen)}}}{\underbrace{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}_{N\text{polos}}}$$

Sin embargo, como todos los ceros están en $z=0$, se le llama un sistema con "sólo polos".

OBS:

$H(z)$ se puede descomponer en $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ (serie) o en $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ (paralelo) $\Rightarrow$ Fracciones parciales.

Causalidad y Estabilidad:

1. Causal: $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$
2. BIBO estable: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \Rightarrow |H(z)| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]||z^{-n}|$$

Si $|z| \leq 1 \quad \Rightarrow |H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$

Como $H(z)$ converge $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

OBS:

Si $|z| \leq 1 \Rightarrow$ el sistema es BIBO estable (i.e., ROC contiene al círculo unitario).

---

[1] Sistemas con:

- "Sólo polos": sin ceros $\neq 0$
- "Sólo ceros": sin polos $\neq 0$

OBS:
Para causalidad se requiere que $|z| > |r|$ (ver ejemplo $x[n] = a^n u[n]$) $\Rightarrow$ Fuera de un círculo dado por el polo más alejado.

$\Rightarrow$ Causal + Estable : $|z| > r < 1$

$\longrightarrow$ El polo más alejado debe estar dentro del círculo unitario para que ROC incluya al círculo unitario.

$\Rightarrow$ Todos los polos deben estar dentro del círculo unitario.[2]

<u>Transformación de $S \longleftrightarrow Z$</u>

¿Cuál es la relación entre Laplace y Z?

¿Cómo se implementan filtros puramente análogos en forma digital?

Existen varias formas de transformar sistemas en el plano -s hacia el plano -z, pero muchos de estos sistemas tienen problema de aliasing al no repetir la periodicidad en 2π de sistemas discretos. (Ejemplo: Remplazo polos/ceros en s directamente a z).

<u>Transformada Bilineal:</u>

- Transforma el eje imaginario $j\Omega$ en el plano s al círculo unitario en el plano z.

$$S = \tfrac{2}{T_s}(\tfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$$

- La relación en frecuencia: $\omega = 2\tan^{-1}(\frac{\Omega T_s}{2})$

$\Rightarrow \Omega = \infty \Rightarrow \omega = \pi$
$\Rightarrow \Omega = -\infty \Rightarrow \omega = -\pi \Rightarrow$ No hay aliasing

OBS:
LHS en el plano $s \Rightarrow$ interior de $|z| = 1$ en el plano z
RHS en el plano $s \Rightarrow$ exterior de $|z| = 1$ en el plano z

[2]Los ceros no importan.