DTFT: Transformada de Fourier en tiempo discreto

⇒ DTFT: Transformada para señales en tiempo discreto.

CTFT: $X(f) = \int_{\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$

Una señal muestreada :

$$\begin{aligned} x_s(t) &= comb_{T_s}(x(t)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT_s) \end{aligned} \tag{1}$$

CTFT de $x_s(t)$:

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT_s)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\delta(t-kT_s)dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)e^{-j2\pi fkT_s} \end{aligned} \tag{2}$$

$n = kT_s \Rightarrow$

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} \\ X_s(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \end{aligned} \tag{3}$$

OBS:

$$comb_{T_s}(x(t)) \quad \overset{CTFT}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{T_s} rep_{\frac{1}{T_s}}(X(f))$$

⇒ DTFT es periódica cada $F_s = \frac{1}{T_s}$ (o 2π periódica).
⇒ $X(\omega) = X(\omega \pm 2\pi)$

<u>Definición:</u>

$$\text{DTFT Directa} \quad : \quad X(\omega) = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{4}$$

$$\text{DTFT Inversa} \quad : \quad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

OBS:
La DTFT es una representación en una base compleja (con amplitud 1), un caso particular de la transformada Z.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$
$$\text{DTFT} \Rightarrow X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

OBS:
Si $X(z)$ tiene a $|z| = 1$ en el ROC, entonces DTFT existe y cumple con $X(\omega) = X\left(z = e^{j\omega}\right)$.

Transformada DTFT: Propiedades

OBS:
Estas propiedades se pueden demostrar de igual forma que se hacen para la transformada Z.

1. Linealidad: $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \quad \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \quad a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$

2. Retardos: $x[n-n_0] \quad \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega)e^{-j\omega n_0}$ (¿Cómo afecta la fase a la señal?)

3. Modulación:

$$\begin{aligned} x[n]e^{j\omega_0 n} &\overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(\omega-\omega_0) = X(e^{(\omega-\omega_0)}) \\ x[n]\cos(\omega_0 n) &\overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

4. Valor DC: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \quad \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \quad X(0)$

5. Conjugado: $x^*[n] \quad \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \quad X^*(-\omega)$

6. Parte real:

$$\begin{aligned} \text{Real}(x[n]) &\overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)] \\ \text{Imag}(x[n]) &\overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j}[X(\omega) - X^*(-\omega)] \end{aligned} \tag{6}$$

7. Convolución:

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &\overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(\omega)\cdot H(\omega) \\ x[n]\cdot h[n] &\overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(\omega) * H(\omega) \end{aligned} \tag{7}$$

8. Tiempo reverso: $x[-n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(-\omega)$

OBS:
Si $x[n]$ es real $\Rightarrow$ $x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(\omega) = X^*(-\omega)$
$X_R(\omega) = X_R(-\omega)$
$X_I(\omega) = -X_I(-\omega)$

$\Rightarrow |X(\omega)| = |X(-\omega)|$
$\Rightarrow \measuredangle X(\omega) = -\measuredangle X(-\omega)$

<u>Pares de transformadas DTFT útiles</u>

i. $x[n] = \delta[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} x[n] = X(\omega) = 1$

ii. $x[n] = 1 \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) = 2\pi rep_{2\pi}[\delta(\omega)]$

iii. $x[n] = e^{j\omega_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(\omega) = rep[2\pi\delta(\omega - \omega_0)]$

iv.

$$
\begin{aligned}
x[n] = u[n] - u[n-N] \quad \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= e^{\frac{-j\omega(N-1)}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin(\omega N)} \\
&= e^{\frac{-j\omega(N-1)}{2}} psinc_N(\omega)
\end{aligned} \tag{8}
$$

v. $x[n] = u\left[n + \frac{(N-1)}{2}\right] - u\left[n - \frac{(N-1)}{2}\right]$, N impar $\overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(\omega) = psinc_N(\omega)$

OBS:

$$
\begin{aligned}
\text{if } x_2[n] = u[n] - u[n-N] &\Rightarrow X_2(\omega) \\
x[n] = x_2\left[n - \frac{(N-1)}{2}\right] &\Rightarrow X(\omega) = X_2(\omega) e^{j\omega\frac{(N-1)}{2}} \\
&\Rightarrow X(\omega) = psinc_N(\omega)
\end{aligned} \tag{9}
$$

vi.

$$
\begin{aligned}
x[n] &= sinc\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\frac{\omega_c}{\pi} \quad \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \\
&= \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}\frac{\omega_c}{\pi} \\
&= \frac{\sin(\omega_c n)}{n\pi}
\end{aligned} \tag{10}
$$

OBS: $sinc(\tau n) = \frac{\sin(n\tau\pi)}{n\tau\pi}$

<u>DTFT y sistemas LTI</u>

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ \Rightarrow Y(z) &= X(z) \cdot H(z) \\ Y(\omega) &= X(\omega) \cdot H(\omega) \end{aligned} \tag{11}$$

OBS: Señales de entrada útiles:

i.

$$x[n] = \delta[n] \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y[n] &= \delta * h[n] = h[n] \\ Y(\omega) &= H(\omega) \end{aligned} \tag{12}$$

ii.

$$\begin{aligned} x[n] &= e^{j\omega_0 n} \\ X(\omega) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k - \omega_0) \\ \Rightarrow Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= H(\omega) \cdot 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega)\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\ &= H(\omega_0) \cdot \underbrace{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)}_{X(\omega)} \\ \Rightarrow Y(\omega) &= H(\omega_0)X(\omega) \\ y[n] &= H(\omega_0)x[n] \end{aligned} \tag{13}$$

OBS:

$$\text{Entre } (-\pi, \pi] \quad \begin{aligned} X(\omega) &= \delta(\omega - \omega_0) \\ \Rightarrow Y(\omega) &= H(\omega)\delta(\omega - \omega_0) \\ Y(\omega) &= H(\omega_0) \end{aligned} \tag{14}$$

OBS:
Es siempre conveniente expresar $X(\omega)$, $H(\omega)$ como $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\sphericalangle H(\omega)}$, ya que se suelen graficar separadas $|H(\omega)|$ y $\sphericalangle H(\omega)$

Problemas tipo:

1. Dada una ecuación de diferencia, obtener $H(\omega)$ y graficar $|H(\omega)|$ y $\sphericalangle H(\omega)$

2. Dada una señal, encontrar su DTFT y la DTFT de la salida al pasar por un filtro (puede ser dado con una ecuación de diferencia, polos y ceros, $h[n]$, o $H(\omega)$)

3. Efectos de upsampling y downsampling en señales ($X(\omega)$, $Y(\omega)$) y sistemas ($H(\omega)$)