Sistemas en tiempo discreto

Definición de sistema: Todo aquello que opera sobre una señal de entrada (tiempo discreto) y genera como salida otra señal (tiempo discreto).

- La señal $x[n]$ es transformada por el sistema S para producir $y[n]$ $\quad (y[n] = S(x[n]) = S(x))$
- La relación entre entrada y salida define las propiedades del sistema S
- La respuesta a impulso de un sistema es la señal de salida del sistema cuando en la entrada hay un delta:

$$h[n] = S(\delta[n])$$

  - Puede ser infinita o finita.
  - En algunos casos no aporta mucha información (E.g. sistemas no lineales y variables en el tiempo, $y[n] = nx[n]$).

Esquema salida vs. entrada: Fig 2.12 Proakis & Manolakis (P&M) y fig. pp 31 Allebach & Chandrasekar (A&C):

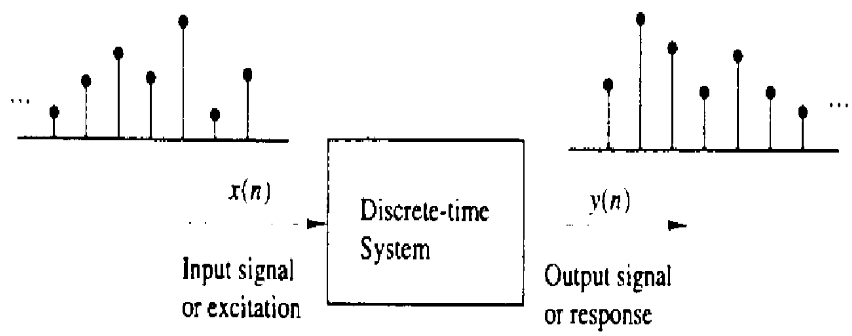
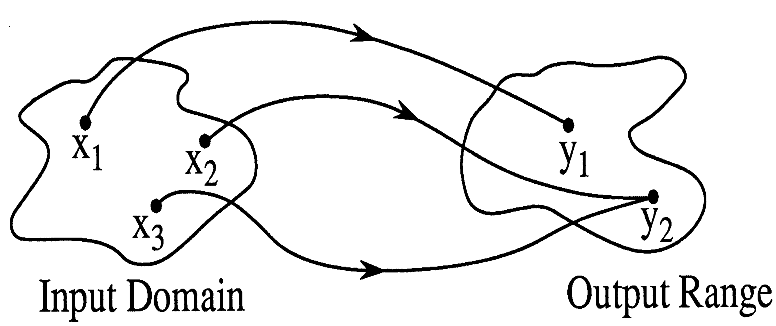


Figure 2.12 Block diagram representation of a discrete-time system.



- Sistemas recursivos $y[n] = S[x[n], y[n]] = S(x, y)$
- Sistemas no-recursivos $y[n] = S[x[n]] = S(x)$.

$\Rightarrow$ Un sistema no tiene una forma única de ser expresado matemáticamente

$\star$ Es posible re-escribir las ecuaciones de ciertos sistemas de modo que su implementación sea distinta:

- Descomposición fraciones parciales
- Recursivo $\longleftrightarrow$ no recursivo
- Manipulación de polos/zeros
- etc.

OBS:

- Un sistema no-recursivo $y = S(x)$ genera una salida que est totalmente definida por la entrada.
- Un sistema recursivo $y = S(x, y)$ genera una señal de salida que puede depender de estados previos de ella misma $\Rightarrow$ requiere condiciones iniciales.

$\Rightarrow$ Condiciones iniciales:

- Asociadas a la señal de entrada (si la señal tiene soporte izquierdo o es a causal $\Rightarrow$ Se asume que condiciones pasadas de la salida también).
- Cuando la salida en tiempos pasados del sistema es cero ($y = 0$) $\Rightarrow$ Sistema inicialmente relajado.
- Se asume para señales con soporte derecho o infinito que en $n = -\infty$, el sistema $y(-\infty] = 0$

Representación gráfica de bloques para sistemas discretos: Figs. 2.13-2.17 P&M.

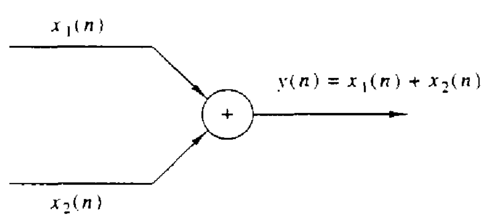


Figure 2.13 Graphical representation of an adder.

Figure 2.14 Graphical representation of a constant multiplier.

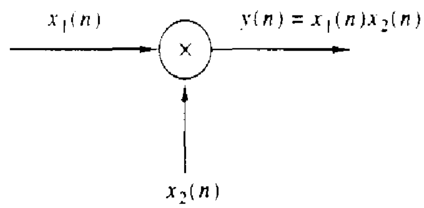


Figure 2.15 Graphical representation of a signal multiplier.

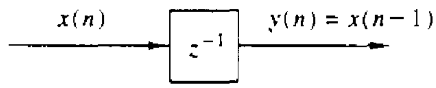


Figure 2.16 Graphical representation of the unit delay element.

Figure 2.17 Graphical representation of the unit advance element.

Propiedades de sistemas discretos[1,2]:

1. Memoria:
   - Sistema sin memoria (o estático) sólo depende de la entrada en el msimo instante, i.e. $y[n] = f(x[n])$.
   - Sistema con memoria (o dinámico) depende de entradas, i.e. $y[n] = f(x[n], x[n-1], ...)$.

   $\Rightarrow$ Si la salida del sistema en el tiempo n (i.e., $y[n]$) esta determinada completamente por la **entrada** $x[n]$ con muestras en el intervalo $n - N$, el sistema tiene memoria N.

   $N = 0 \Rightarrow$ Sin memoria o estático
   $0 < N < \infty \Rightarrow$ Memoria finita (dinámico o con memoria)
   $N = \infty \Rightarrow$ Memoria infinita (dinámico o con memoria)

   Ejemplos:

   i $y[n] = ax[n] \longrightarrow N = 0$
   ii $y[n] = nx[n] + bx^3[n] \longrightarrow N = 0$
   iii $y[n] = x[n] + 3x[n-1] \longrightarrow N = 1$
   iv $y[n] = \sum_{k=0}^{M} x[n-k] \longrightarrow N = M$
   v $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[n-k] \longrightarrow N = n$
   vi $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k] \longrightarrow N = \infty$
   vii $y[n] = y[n-1] + x[n] \longrightarrow N = \infty$ (pero puede ser implementado con $N = 1$ en la salida)

2. Linealidad
   Definición: Un sistema inicialmente relajado es lineal si para cualquier par de entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ y cualquier par de constantes a_1,a_2 se satisface que:

$$S(a_1x_1[n] + a_2x_2[n] = a_1S(x_1[n])) + a_2S(x_2[n])$$

[1]Cada propiedad clasifica sistemas.
[2]Deben ser para todas las señales de entrada (es más facil demostrar que no cumple cierta propiedad).

- Principio de superposición: La respuesta de una señal que corresponde a una suma ponderada de otras señales (componentes) es igual a la suma ponderada de la respuesta de cada componente. (Fig 2.20 en P&M):

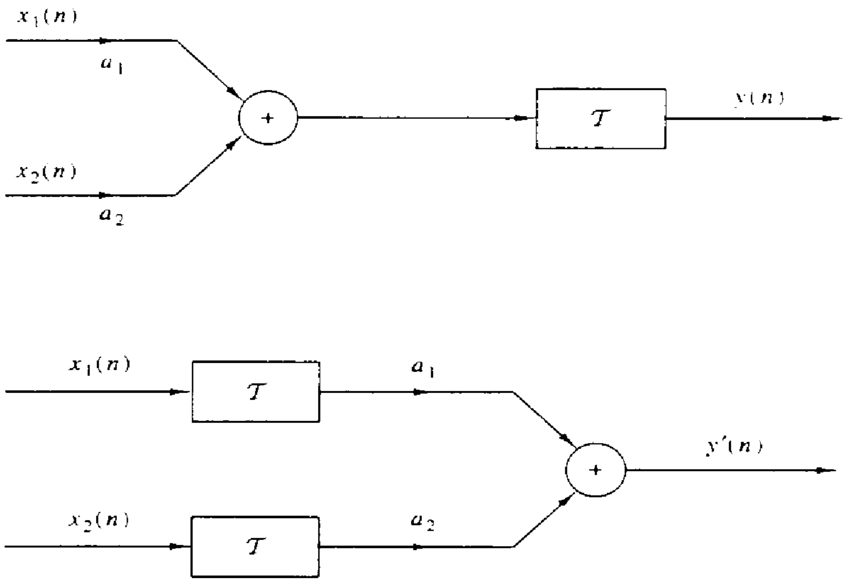


Figure 2.20 Graphical representation of the superposition principle. $\mathcal{T}$ is linear if and only if $y(n) = y'(n)$.

OBS:

- Un sistema lineal e inicialmente relajado tiene $y[n] = 0$ cuando $x[n] = 0$.
  $\Rightarrow$ Si $y[n] \neq 0$ puede ser que no sea lineal o no esté inicialmente relajado.
- Sistemas inicialmente relajados que no cumplan con el principio de superposición: No lineales.

  Ejemplos:

  i $y[n] = nx[n]$

  ii $y[n] = x^2[n]$

  iii $y[n] = x[n^2]$

  iv $y[n] = Ax[n] + B$

  v $y[n] = e^{x[n]}$

  vi $\text{y[n]} = \begin{cases} -1 & x[n] < -1 \\ x[n] & -1 \leq x[n] \leq 1 \\ 1 & x[n] > 1 \end{cases}$

3. Invarianza en el tiempo
   Definición: Un sistema (inicialmente relajado) es invariante en el tiempo si un retardo en la señal de entrada genera un retardo en la señal de salida, i.e.,

$y_1[n] = S(x[n])$
$y_2[n] = S(x[n-k])$
$y_2[n] = y_1[n-k]$

OBS:
$y(n,k) = S(x[n-k])$, para cualquier $x[n]$
Si $\forall n, k y(n,k) = y[n-k]$, entonces el sistema es *Time Invariant* (TI),
en caso contrario es *Time Variant* (TV).

Ejemplos:

i $y[n] = x[n] - x[n-1]$

ii $y[n] = nx[n]$

iii $y[n] = x[-n]$

iv $y[n] = x[2n]$

v $y[n] = x[n]\cos(\omega_0 n)$

4. <u>Causalidad</u>
Definición: Un sistema es causal si la salida del sistema a cualquier tiempo ($y[n]$) depende de muestras actuales y pasadas ($x[n], x[n-1], ...$), pero no depende de muestras futuras ($x[n+1], x[n+2], ...$) i.e. el sistema se puede escribir como:

$$y[n] = F(x[n], x[n-1], x[n-2], ...)$$

OBS:
En sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), causalidad se puede evaluar en la respuesta a impulso, i.e. si $h[n]$ es una señal causal ($h[n] = 0\ \forall n < 0$), el sistema es causal.

OBS:
Cómo puede existir un sistema no causal?

- Trabajar off-line
- Trabajar con buffer y cierta latencia

Ejemplos:

i $y[n] = x[n] \longrightarrow h[n] = \delta[n]$

ii $y[n] = x[n-1] \longrightarrow h[n] = \delta[n-1]$

iii $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-3] \longrightarrow h[n] = \{\underline{b_0}, b_1, b_2, b_3\}$

iv $y[n] = y[n-1] + x[n]$

v $y[n] = x[n] + 3x[n+4]$

vi $y[n] = x[n^2]$

vii $y[n] = x[2n]$

viii $y[n] = x[-n]$

5. Estabilidad

   Definición: Un sistema inicialmente relajado es BIBO (bounded input bounded output) $\Leftrightarrow$ $y[n]$ es acotada para cada entrada $x[n]$ acotada, i.e., es BIBO si:

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \text{ y } |y[n]| \leq M_y < \infty \; \forall n$$

   OBS:
   Esto implica que para LTI, un sistema es BIBO si:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \text{ (Su respuesta a impulso es absolutamente sumable)}$$

   De dónde viene? Para LTI:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ |y[n]| &= |\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \\ &\leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \end{aligned}$$

   $\Longrightarrow$ Si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad \Rightarrow \quad |y[n]| \leq M_y < \infty \Rightarrow$ BIBO estable.

Ejemplos:

1. $y[n] = x[n-1] \quad \longrightarrow \quad h[n] = \delta[n-1]$
2. $y[n] = x[2n] \quad \longrightarrow \quad$ if $x[n] < \infty \Rightarrow |y[n]| < \infty$
3. $y[n] = y[n-1] + x[n] \quad \longrightarrow \quad$ if $x[n] = u[n] \quad y[\infty] = \infty$
4. $y[n] = y^2[n-1] + x[n] \quad \longrightarrow \quad$ if $x[n] = u[n] \quad y[\infty] = \infty$

OBS:
Series geométricas son útiles: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1; \qquad \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1-z^N}{1-z}$